



Quantum Rules!

Supergeleiding: theorie

In deze tekst wordt aan de hand van elementaire quantummechanica een uitleg gegeven van supergeleiding.

Vrije elektronen

In metalen zijn de metaalatomen netjes gerangschikt. Ze vormen samen een zogenaamd rooster. Tussen de atomen bewegen de "vrije" elektronen. Zij zorgen voor de geleiding van elektrische stroom en warmte. De beweging van de elektronen wordt echter gehinderd door de metaalatomen en onzuiverheden (vreemde atomen aanwezig in het metaal). Door botsingen met deze objecten verliezen ze energie. Zo ontstaat elektrische weerstand in een metaal.

Naast de eigenschappen massa en lading heeft een elektron ook spin: de rotatie die het elektron om zijn eigen as uitvoert. Spin kan je je voorstellen als een vector; als het elektron rechtsonder draait is de spin een pijltje omhoog, en als de draaiing linksom is een pijltje omlaag.

Verdeling van elektronen

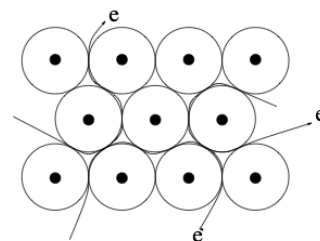
De energie (E) van een elektron hangt af van zijn impuls (p). Hoe groter zijn impuls hoe groter zijn energie:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

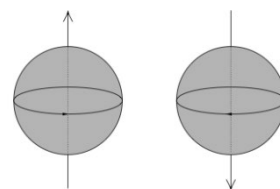
Net als in een atoom hebben de vrije elektronen in een metaal energietoestanden. Een quantummechanische eigenschap van elektronen is dat er zich geen twee elektronen met dezelfde spin in één toestand kunnen bevinden. Dit betekent dat er maar twee elektronen dezelfde energie kunnen hebben: eentje met spin omhoog en eentje met spin omlaag. Dit mechanisme heet "het uitsluitingsprincipe van Pauli", genoemd naar de ontdekker ervan.

Als een metaal gekoeld wordt, krijgen de vrije elektronen een lagere energie. Ze zoeken de lagere energietoestanden op. Maar ze moeten daarbij rekening houden met het uitsluitingsprincipe van Pauli. De laagste energie die de vrije elektronen samen kunnen maken is door "laag voor laag" elke energietoestand met twee elektronen op te vullen. Zie figuur 4.

Versie: 2026-01-09



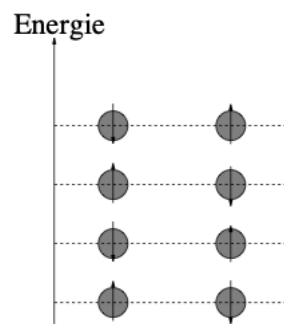
Figuur 1 Vrije elektronen zorgen voor geleiding van warmte en elektrische stroom

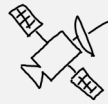


Figuur 2 Spin up en Spin down



Figuur 3 Wolfgang Pauli (bron: wikimedia Commons)





Quantum Rules!



Figuur 5 Cooperpaar

Figuur 4 De laagste energietoestand van elektronen.

Cooperparen

Zoals boven uitgelegd werd zoeken de elektronen in een metaal dat gekoeld wordt met zijn allen altijd de laagste energie op. De vrije elektronen doen dat door een voor een de toestanden op te vullen, maar beneden de kritische temperatuur gaan de elektronen paren vormen, de zogenaamde Cooperparen (zie figuur 5). Hierdoor wordt de energie per elektron verlaagd.

Dit is dus een "truc" van de elektronen om samen de energie nog lager te maken. Een Cooperpaar bestaat uit twee elektronen met tegengestelde impuls en tegengestelde spin. Het paar heeft dus een elektrische lading $2e$, twee keer de lading van het elektron. De afstand tussen de elektronen in een Cooperpaar is groot. In een opgave gaan we hier dieper op in (zie onder **Vragen**).

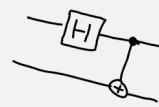
Het mechanisme dat er voor zorgt dat de vrije elektronen zich gaan rangschikken in paren is als volgt:

- Elektron 1 met impuls p_1 en spin omhoog botst op een metaalatoom en veroorzaakt een verstoring van het rooster (een zogenaamd *fonon*).
- Omdat het geheel (elektron + fonon) lading-neutraal is, draagt het fonon een positieve lading.
- Elektron 2 met impuls p_2 ($p_2 = -p_1$) en spin omlaag wordt door het fonon aangetrokken
- Op deze manier oefenen elektron 1 en elektron 2 via een fonon een aantrekkende kracht op elkaar uit.
- De vorming van een Cooperpaar is het resultaat.

Het verdwijnen van de weerstand

Eerder werd al uitgelegd dat elektrische weerstand ontstaat als de vrije elektronen botsen met de onzuiverheden in een metaal: die vrije elektronen zorgen voor het ladingtransport (elektrische stroom). In supergeleiders met een temperatuur beneden hun kritische temperatuur zijn de Cooperparen de fundamentele ladingdragers.

Als je dit eenmaal ingezien hebt, is het makkelijk te begrijpen dat de elektrische weerstand in een supergeleider verdwijnt: Omdat een Cooperpaar uit twee elektronen bestaat is het voor het paar als geheel heel moeilijk om als één deeltje met een onzuiverheid te botsen. Het gebeurt daarom ook heel erg weinig. De Cooperparen "zien" de onzuiverheden niet meer en kunnen zich ongehinderd voortbewegen. Het resultaat is dat de weerstand van de supergeleider gelijk aan nul wordt.



Quantum Rules!

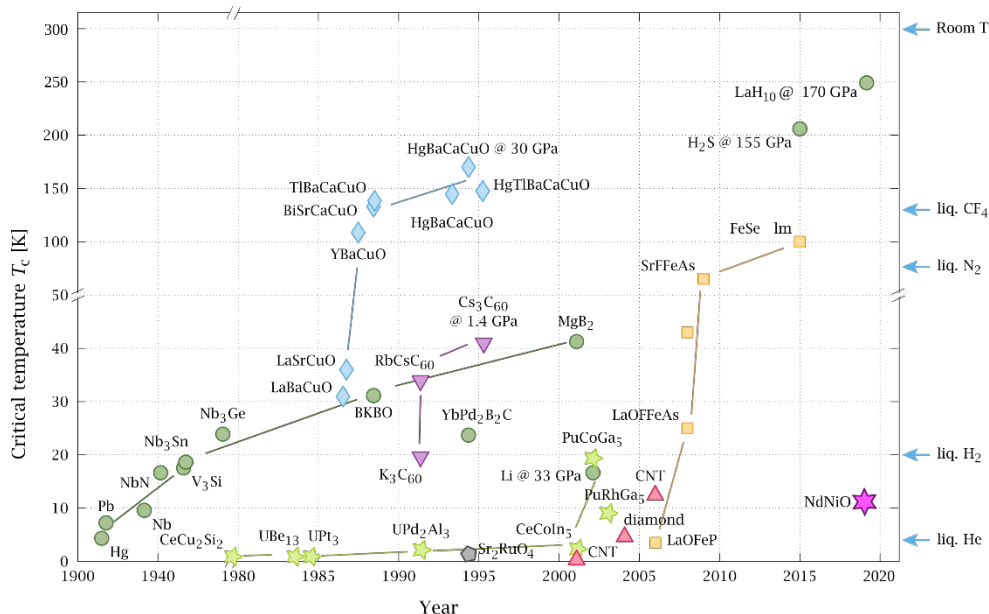
Hoge- T_c supergeleiders

In 1986 vonden Georg Bednorz en Klaus Müller, onderzoekers van IBM, supergeleidende toestanden in de zogenaamde koperoxiden. Dit zijn keramische stoffen, opgebouwd uit lagen. Het bijzondere was, dat de kritische temperaturen van deze stoffen zeer hoog zijn vergeleken met andere supergeleiders. Een van de koper-oxiden, $\text{TiF}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$, heeft een kritische temperatuur van maar liefst 125 Kelvin!!

Met deze ontdekking is de toepasbaarheid van supergeleiders in de technologie veel dichterbij gekomen. Daarom worden hoge- T_c supergeleiders van allerlei soorten materialen – veelal legeringen – in vele laboratoria onderzocht. De wetenschappers willen onder andere weten hoe ze stoffen kunnen maken met nog hogere kritische temperaturen die tegelijk ook sterk zijn. De supergeleiders met hoge T_c zijn vaak broos.

De 'heilige graal' is een materiaal dat bij kamertemperatuur of op zijn minst boven het kookpunt van stikstof (en normale luchtdruk hard en supergeleidend is: dan is het eenvoudiger om die supergeleiding te benutten.

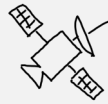
Figuur 8 toont een overzicht van materialen waarvan ontdekt is dat ze supergeleiden, en hun T_c . Sommige zijn dat pas bij hoge druk (GPa!).



Figuur 6: Een supergeleider van een keramisch materiaal met hoge temperatuur supergeleiding is een legering van oxiden van yttrium, barium en koper in verhoudingen $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, afgekort als YBCO. Bron: Wikimedia. M., Bilovitskiy

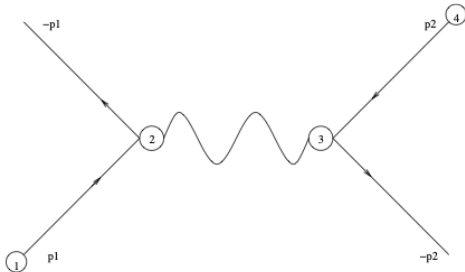
Figuur 7: ontdekkingen van supergeleiding op een rij in de loop van de tijd. Bron: Wikimedia, PJRay .

Helaas begrijpen we hoge- T_c supergeleiders nog maar deels. Welk mechanisme is er werkzaam in deze mysterieuze stoffen? Niemand kan het nog vertellen.....



Quantum Rules!

Vragen



Figuur 8: Vorming van een Cooperpaar

Pauli-principe

Stel, je hebt 6 vrije elektronen en 4 energietoestanden. De energietoestanden zijn 1 eV van elkaar gescheiden en de laagste toestand heeft een energie van 2 eV.

- 1) Wat is de laagste energie die de elektronen samen kunnen hebben? En wat is de op één na laagste energie?

Cooperparen

De vorming van een Cooperpaar (met elektron 1 en elektron 2) kan voorgesteld worden door het schema in figuur 8. In het schema staan op verschillende punten de cijfers 1 tot en met 4.

Elk punt correspondeert met één van onderstaande gebeurtenissen.

- 2) Zoek bij elk cijfer de juiste gebeurtenis.
 - Elektron 2 beweegt zich vrij door het metaal.
 - Elektron 1 botst met het metaalrooster en veroorzaakt een positief geladen fonon.
 - Elektron 1 beweegt zich vrij door het metaal.
 - Elektron 2 wordt aangetrokken door het positief geladen fonon.

De grootte van een Cooperpaar

Met de theorie die Bardeen, Cooper en Schrieffer in 1956 bedachten (de BCS-theorie) kan je uitrekenen wat de gemiddelde afstand tussen twee elektronen in een Cooperpaar is. Deze berekening is erg ingewikkeld, maar het uiteindelijke resultaat is:

$$\bar{r} = a \cdot e^{2/x}$$

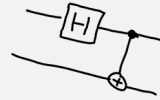
Hierin geeft $\bar{r}$ de gemiddelde afstand tussen de elektronen aan, is a een constante en heeft een waarde van ongeveer 10^{-10} m. De x geeft aan hoe sterk de elektronen elkaar (via een fonon) aantrekken. Als x groot is, is de aantrekking sterk en als x klein is, is de aantrekking zwak.

Omdat supergeleiding optreedt bij hele lage temperaturen, is het getal x klein.

- 3) Leg deze laatste uitspraak uit.
- 4) Neem eens $x = 0,25$. Reken hiermee r uit.

De straal van een atoom is ongeveer 10^{-10} m.

- 5) Vind je Cooperparen groot of klein? Licht je antwoord toe.



Quantum Rules!

Antwoorden

Pauli-principe

$$\begin{array}{r}
 2 \times 2 = 4 \text{ eV} \\
 2 \times 3 = 6 \text{ eV} \\
 2 \times 4 = 8 \text{ eV} + \\
 \hline
 18 \text{ eV}
 \end{array}$$

Het Pauli-uitsluitingsprincipe zegt dat er maar twee elektronen in elke energie toestand mogen zitten. Zo kan je het simpele systeem in deze som vol maken met de 6 elektronen. de laagste energietoestand wordt dan berekend zoals hiernaast. De laagste energie is 18 eV.

De op één na laagste energie van het systeem is 19 eV. De twee laagste toestanden zijn dan dubbel bezet en de twee hoogste herbergen beide één elektron.

Cooperparen

Een belangrijke opmerking bij deze som is dat figuur 5 *geen* Feynmann-diagram is. Dit diagram is een 2-dimensionale, ruimtelijke weergave van het paarvormingsproces.

Het goede antwoord is:

1. elektron 1 beweegt zich vrij door het metaal.
2. elektron 1 botst met het metaalrooster en veroorzaakt een positief geladen fonon.
3. elektron 2 wordt aangetrokken door het positief geladen fonon.
4. elektron 2 beweegt zich vrij door het metaal.

De grootte van een Cooperpaar

De gebruikte formule in deze som is een benadering voor kleine x . De limiet $x \rightarrow \infty$ is niet fysisch.

- Als de temperatuur van een metaal heel laag is, zijn de energieën van elektronen klein. Dus ook de energie waarmee een elektron op het rooster botst en een phonon veroorzaakt. Dit phonon heeft op zijn beurt een lage energie en daarmee de hele aantrekking tussen twee elektronen die het Cooperpaar vormen. Als de aantrekking zwak is, is x klein.

- $\bar{r} = a e^{\frac{2}{0,25}} \implies \bar{r} \sim 298 \text{ nm}$

- Vergelijk je de berekende waarde van $\bar{r}$ met een gemiddelde atoomstraal, dan zie je dat Cooperparen zeer groot zijn. Ze zullen in een supergeleider dus sterk overlappen.